L1 STE Statistiques (TD3)

Variables aléatoires

Exercice 1 : Vous lancez deux dés parfaits non pipés (hypothèse d'équiprobabilité). Appelons X la variable aléatoire associée à la somme de la valeur des deux dés.

1. Quelles valeurs x_i peut prendre cette variable aléatoire X ?
2. Pour chacune de ces valeurs x_i, donnez la loi de probabilité $f(x_i)$
3. Quelle est la probabilité $P(X = 1)$?
4. Que vaut $P(X \leq 5)$? $P(X \leq 12)$?
5. Pour chacune des x_i, donnez la fonction de répartition $F(x_i)$.
6. Que vaut $P(5 \leq X \leq 10)$?
7. Que vaut l'espérance de X ?
8. Que vaut la variance de X ?

Exercice 2 : Un zooplancton se déplace verticalement dans la colonne d'eau. A chaque pas de temps, il monte ou il descend aléatoirement d'un millimètre. Au bout de 6 pas de temps, on arrête l'observation. On appelle X la distance arithmétique (i.e. toujours positive) parcourue en millimètre depuis le début de l'observation. On suppose qu'au début de l'observation le plancton se trouvait très loin de la surface ou du fond (il n'y a donc aucun effet de bord à redouter).

1. Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire X. Quelle est la distance ayant la plus grande probabilité ?
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Lois de probabilités

Exercice 3 : Dans l'espèce humaine, la sex-ratio (rapport du nombre de garçons sur le nombre de filles) à la naissance est supérieure à 1. En France, on a environ 105 garçons pour 100 filles à la naissance. Quelle est la probabilité pour une famille de 5 enfants, d'avoir :

1. exactement 3 garçons ? au moins 3 garçons ? 2 ou 3 garçons ?
2. soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de garçons dans cette famille de cinq enfant, donnez son espérance et sa variance ?

Exercice 4 : La probabilité de guérison du virus Ebola est de 10 %. Parmi les 16 patients d'un hôpital :

1. Quel nombre de guérisons attendez-vous ?
2. Quelle est la probabilité que 5 personnes guérissent au maximum?
3. Quelle est la probabilité qu'au moins 5 personnes guérissent ?
4. Quelle est la probabilité que 5 personnes exactement guérissent ?

Exercice 5 : Un ichtyologue étudie une espèce de chabot. Il échantillonne cette espèce en utilisant un filet en forme de "V" qu'il lance depuis le bord de l'eau et qu'il ramène ensuite. D'après sa longue expérience d'échantillonnage de cette espèce, il sait qu'il attrapera en moyenne 2 individus par lancer (on suppose que le phénomène suit une loi de Poisson).

Représenter graphiquement la fonction de densité de la variable aléatoire X correspondant au nombre d'individus capturés avec un lancer de filet (en considérant les valeurs de X de 0 à 10).

1. Quelle est la probabilité de n'attraper aucun individu avec un lancer ?
2. Quelle est la probabilité de capturer moins de 6 individus avec un lancer ?
3. Quelle est la probabilité de capturer entre 3 et 6 individus avec un lancer ?

Exercice 6 : *Exercice de lecture de table*.

1 Si X suit une loi normale N(2; 3), déterminer $P(X \leq 8)$.
2 Si X suit une loi normale N(3; 1.5), déterminer α pour que $P(X \leq \alpha) = 0{,}4218$
3 Si X suit une loi normale N(5; 2), déterminer $P(2{,}5 \leq X \leq 6{,}5)$
4 Si X suit une loi normale N(6; 2), déterminer un intervalle centré sur la moyenne, de probabilité 0,9.

Exercice 7 : On suppose que la taille des étudiants mâles du campus est une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne 177,5 cm et d'écart-type 4,02 cm. On prélève un amphi (85 garçons).

1 Combien d'étudiants de plus de 180 cm s'attend-on à trouver ?
2 Combien d'étudiants de moins de 170 cm s'attend-on à trouver ?
3 Combien devraient faire entre 165 et 172 cm ?

Exercice 8. Dans une étude morphométrique sur la grande oie blanche, où l'on cherchait à mettre en évidence les variations de la taille des individus en fonction du sexe, de l'âge et de la phase colorée (blanche ou bleue), Heyland et Scherrer (1971) ont mesuré 23 caractères, dont la longueur totale des individus. L'échantillon présenté ci-après se compose de 217 jeunes femelles de la phase blanche (moins d'un an), tuées lors de la chasse dans estuaire du Saint-Laurent. La distribution de fréquence des longueurs totales exprimées en millimètres est la suivante :

X (centre de classe)	625	645	665	685	705	725	745	765	785
Fréquence	1	1	0	9	57	72	58	16	3

La moyenne et l'écart type, calculés sur les données brutes sont 728,1 mm et 21,8 mm, respectivement.

Si l'on admet que la distribution des longueurs totales obéit à une loi normale de moyenne 728.1 mm et d'écart type 21,8 mm.

1 Calculer la distribution de probabilité des longueurs totales et représenter graphiquement cette distribution.
2 Sachant que la plus petite grande oie blanche mâle juvénile de la phase blanche mesurait 680 mm. Quelle est la probabilité de trouver une jeune femelle de la phase blanche plus petite que ce dernier mâle ?
3 Dans quel intervalle de longueur devrions-nous trouver 95% des jeunes femelles de la phase blanche ?

4 Un chasseur a tué une jeune oie femelle de la phase blanche dont la longueur totale était de 708,12 mm. Quelle est la probabilité de tuer une autre oie d'une longueur totale rigoureusement identique et de même catégorie d'âge, de sexe et de phase ?
5 Dix pour cent des jeunes oies femelles de la phase blanche devraient avoir une longueur totale égale ou supérieure à quelle valeur ?
6 Dix pour cent des jeunes oies femelles de la phase blanche devraient avoir une longueur totale ou inférieure à quelle valeur ?
7 Quelle proportion d'oies femelles juvéniles de la phase blanche devrait avoir une longueur inférieure à 728,1 mm ?

Exercice 9 : Une variable aléatoire continue X est distribuée selon une loi normale. Sachant que :
$P(X < 3{,}36) = 0{,}123$
$P(X > 10{,}8) = 0{,}242$
Calculer la moyenne et l'écart type de cette distribution ; déterminer un intervalle centré sur la moyenne et renfermant 48,8% des valeurs de X. Faire un dessin explicatif.

Exercice 10 : Tout le monde ne se vaccine pas contre la grippe. C'est un vaccin relativement cher à produire et qui ne peut être conservé d'une année sur l'autre. Tout le problème est donc de bien planifier l'approvisionnement afin de minimiser le risque de pénurie. Les pharmacies d'une ville moyenne de 20 000 habitants souhaitent s'approvisionner en vaccin. Faisons l'hypothèse que le nombre de vaccins achetés dans cette ville suit habituellement une loi normale de moyenne 8000 et de variance 4800. Combien de vaccins doivent être commandés pour que la probabilité de pénurie soit inférieure à 10 %?

TABLE III — AIRES LIMITÉES PAR LA COURBE NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

La table fournit les valeurs de $\phi(z)$ pour z positif. Lorsque z est négatif il faut calculer le complément à l'unité de la valeur lue dans la table. La première colonne indique la première décimale de z et la première rangée fournit la deuxième décimale.

Exemples : pour $z = 1{,}21$, $\phi(z) = 0{,}8869$ et pour $z = -1{,}21$, $\phi(z) = 0{,}1131$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

z	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000
4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000