Introduction aux Statistiques
Dénombrements & probabilités

L1 STE

Dénombrements et probabilités

- **Dénombrements**
  - Arrangement avec répétition (avec remise)
  - Arrangement sans répétition (sans remise)
  - Combinaison sans répétition
- **Evènements**
  - Intersection, union, complémentarité
  - Règles de calcul
- **Probabilité d'un évènement**
  - Fréquences
  - Propriétés de calcul
- **Indépendance**
- **Probabilité conditionnelle**

Arrangement avec répétition (avec remise)

Situation type:

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire une, on relève son numéro puis on la repose dans l’urne.

On en tire ensuite une seconde, et on la repose. Ainsi de suite, un nombre p de fois. Au terme de ces tirages, on a donc une suite ordonnée de p entiers. Il existe n^p suites de tirages différentes.

Arrangement sans répétition (sans remise)

Situation type:

Une urne contient n boules numérotées de 1 à *n*. On en tire une, on relève son numéro mais on ne la repose pas dans l'urne. On en tire ensuite une seconde, et on la garde aussi de côté. Ainsi de suite, un nombre *p* de fois. Au terme de ces tirages, on a donc une suite ordonnée de *p* entiers. Il existe :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

arrangements sans répétition de *p* éléments parmi *n*.

Combinaisons sans répétition

Situation type:

Une urne contient *n* boules numérotées de 1 à *n*. On en tire une poignée de *p* boules d'un seul coup et on relève leur numéro. Notez bien qu'il ne s'agit plus liste ordonnée puisque nous n'avons plus d'ordre de tirage. Il existe

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

combinaisons sans répétition de *p* éléments parmi *n*.

Propriétés remarquables

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$$

$$A_n^n = n!$$

$$0! = 1$$

$$C_n^0 = 1$$

$$A_n^0 = 1$$

$$C_n^1 = n$$

$$A_n^1 = n$$

$$C_n^n = 1$$

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

Evènements

Phénomène aléatoire: Expérience dont le résultat ne peut être prévue de façon certaine.

Espace échantillon: Ensemble de tous les résultats possibles d’une expérience aléatoire (Ω).

Évènement: Sous espace de Ω.

Probabilité empirique: probabilité fondée sur l’expérience.

0=<P=<1, 0: événement impossible; 1 : événement certain.

Evènements incompatibles : Lorsque deux événements ont une intersection vide, c’est qu’il ne peuvent pas être réalisés au cours d’une même expérience. On les appelle alors événements incompatibles.

Précisons quelques notations :

- $A \cup B$: A ou B se réalisent
- $A \cap B$: A et B se réalisent
- $\overline{A}$: contraire (ou complémentaire) de A

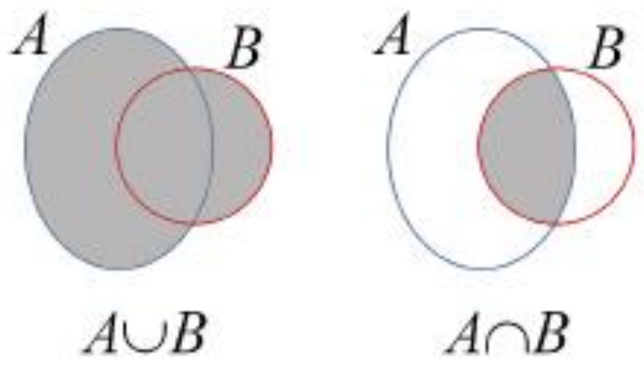

FIG. 1 – patatoïdes (diagrammes de Venn) pour l'union ou l'intersection

$$
\begin{aligned}
\overline{(\overline{A})} &= A \\
\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\
\overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
$$

Probabilité d'un évènement

Blaise Pascal (1623-1662), Pierre Fermat (1601-1665)

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{f}{N}$$

Avec N répétitions d'une expérience aléatoire, *f* le nombre de fois que l'événement A s'est produit. P(A) est la probabilité de l'événement A. C'est la **loi des grands nombres.**

Autre façon de l'exprimer:

$$n \to \infty \Rightarrow f \text{ rel.} \to p$$

$$\lim_{n \to \infty} P[(f \text{ rel.} - \mathrm{p}) < \varepsilon] = 1$$

Quelques règles…

P: *A* -> R

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$$

pour chaque événement A appartenant à Ω

$P(\Omega) = 1$

Pour toute suite dénombrable d ’évènements mutuellement exclusifs A_1, A_2, … c’est-à-dire incompatibles deux à deux :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)}$$

- E_1 et E_2 deux issues d'une expérience aléatoire; E_1 et E_2 incompatibles:

$$\boxed{P(E_1 \text{ou } E_2) = P(E_1 \bigcup E_2) = P(E_1) + P(E_2)}$$

- E_1 et E_2 deux issues d'une expérience aléatoire; E_1 et E_2 compatibles:

$$\boxed{P(E_1 \text{et } E_2) = P(E_1 \bigcap E_2) = P(E_1) \text{x } P(E_2)}$$

- E_1 et E_2 deux issues d'une expérience aléatoire; E_1 et E_2 compatibles:

$$\boxed{P(E_1 \text{ou } E_2) = P(E_1 \bigcup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \bigcap E_2)}$$

Indépendance

Deux événements *A* et *B* sont **indépendants** si la réalisation de l'un n'influe pas sur celle de l'autre. En terme mathématique, deux événements *A* et *B* sont indépendants si et seulement si

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$$

Probabilités conditionnelles:

Si *A* et *B* sont deux évènements, la probabilité conditionnelle de *A* étant donné *B* indique la probabilité que *A* se produise sachant que *B* s'est déjà produit, noté P(*A*|*B*) ou $P_B(A)$.

Si la réalisation ou la non-réalisation de *B* n'affecte pas *A* (évènements indépendants) alors:

$$\boxed{P(A|B) = P(A)}$$

Sinon

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

ou

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}}$$